

07

Teorías en sistemas móviles del campo electromagnético

Uno de los grandes éxitos de la teoría de la relatividad restringida de Einstein fue la unificación del campo eléctrico y magnético en una identidad dual que dependía solo del movimiento relativo para distintos observadores.

Ya a bajas velocidades, cuando las velocidades eran pequeñas con relación a la velocidad de la luz, se conocía que dependiendo del estado de movimiento podían aparecer campos eléctricos y magnéticos y se habían descubierto algunas relaciones de transformación.

Desde muy al principio era conocido que se producían magnetizaciones aparentes en dieléctricos que se desplazaban debido a las corrientes convectivas de las cargas de polarización, y polarizaciones debidas al movimiento de magnetizaciones.

Más sorprendente fue el descubrimiento por Fizeau del fenómeno de que la luz parecía sufrir un cambio de velocidad cuando atravesaba un medio dieléctrico que se desplazaba, y que dependía del ángulo que formaba el rayo con la dirección del movimiento. Sin embargo, el experimento de Michelson demostró posteriormente que la velocidad de la luz era la misma para todos los observadores independientemente de su movimiento relativo.

Las relaciones exactas de transformación del campo electromagnético no se conocieron en detalle hasta que Einstein formuló la teoría de la relatividad. Fue Minkowski el primero que dio una estructura formal unificada de las relaciones de transformación en un algebra definida sobre un espacio espacio-tiempo vectorial de tres dimensiones espaciales y una cuarta temporal imaginaria. En este capítulo no utilizaremos notación, que hoy en día ha sido sustituida por otra covariante más

moderna; sin embargo, todas ellas son equivalentes y solo difieren en cómo se defina el producto interno de los cuadvectores.

En este capítulo nos centraremos en cómo se transforma el campo electromagnético entre distintos observadores en movimiento relativo. Especial interés tiene cuando hay materiales dieléctricos y magnéticos que se desplazan y se analizará cómo se transforman las ecuaciones de Maxwell.

Veremos que la aparición de polarizaciones cuando un material magnético se desplaza es un fenómeno complejo que depende del concepto de la simultaneidad del tiempo relativista, y que incluso la ley de inducción de Faraday se puede interpretar como asociada a estos mismos principios.

Teoría fenomenológica del movimiento de materiales a bajas velocidades

En este apartado se analizarán de forma general los efectos electrodinámicos debido a materiales en movimiento a velocidades pequeñas comparas con la de la luz en el vacío.

Si los sistemas se mueven relativamente uno respecto a otro, veremos que las componentes del campo eléctrico y magnético observadas no son independientes y que están interrelacionados entre ellos.

Cuando los materiales tienen polarizaciones como en el caso de un dieléctrico, debido a los efectos de las corrientes de conducción de las cargas de polarización veremos que surgen nuevos efectos de magnetización aparente.

Se comentará también el efecto Fizeau por el que la luz parece sufrir una aceleración al atravesar en un medio dieléctrico dispersivo.

Consideremos un medio dieléctrico homogéneo que se desplaza velocidad constante $\vec{v}$ en presencia de un campo electromagnético exterior.

La fuerza de Lorentz nos define la fuerza que vería un observador fijo O cuando una carga q se mueve con velocidad $\vec{v}$ no relativista $v \ll c$ en un campo electromagnético

$$\vec{F}_L = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

Un observador O^* que se moviese junto con la carga la vería en reposo y por tan observaría solamente un campo eléctrico efectivo

$$\vec{E}^* = \vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}$$

Para una corriente de conducción $\vec{J}_c$ en un conductor neutro sin carga netas, la densidad de fuerza para un observador fijo es $\vec{J}_c \wedge \vec{B}$ deberá ser igual a la densidad de fuerza $\vec{J}_c^* \wedge \vec{B}^*$ vista por el observador móvil por lo que deberá ser

$$\vec{B}^* = \vec{B}$$

Las magnitudes observadas en el sistema S^* que se encuentra fijo con las cargas las denotaremos con un asterisco.

En un material dieléctrico y conductor que se mueve con velocidad $\vec{v}$ se crea por tanto una corriente de conducción y una polarización efectiva dadas por

$$\begin{aligned}\vec{J}_c^* &= \sigma \vec{E}^* = \sigma (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \\ \vec{P}^* &= (\epsilon - \epsilon_0) \vec{E}^* = (\epsilon - \epsilon_0) (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})\end{aligned}$$

La ecuación de constitución de Maxwell es este caso adopta la forma

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}^* = \epsilon \vec{E} + (\epsilon - \epsilon_0) \vec{v} \wedge \vec{B}$$

Al ser $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$, la ecuación dinámica de Maxwell para la ley de Gauss será

$$\epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}^*$$

Ya vimos que, para dieléctricos en reposo con una densidad de polarización, el campo electromagnético se puede interpretar como originado por unas fuentes ficticias debidas a una densidad de carga de polarización $\rho_p = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$ y una densidad de corriente de polarización $\vec{J}_p = \partial \vec{P} / \partial t$.

Por tanto, el observador externo fijo, además de la corriente de conducción verá una corriente de convección por el arrastre de las cargas

$$\vec{J}_v = (\rho - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}^*) \vec{v}$$

La corriente neta de cargas de polarización $\vec{J}_p^*$ que cruza una superficie imaginaria fija en el sistema O^* de coordenadas que se mueve con el observador viene dada por la ecuación de la derivada convectiva (también llamada sustancial)

$$\vec{J}_p^* = \frac{d\vec{P}^*}{dt} = \frac{\partial \vec{P}^*}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{P}^* = \frac{\partial \vec{P}^*}{\partial t} + \vec{\nabla} \wedge (\vec{P}^* \wedge \vec{v}) + \vec{v} \vec{\nabla} \cdot \vec{P}^*$$

Por tanto, la otra ecuación dinámica de Maxwell para la ley de Ampère en el sistema fijo, teniendo en cuenta todas las fuentes de corrientes deberá ser

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 (\vec{J}_v + \vec{J}_c^* + \vec{J}_p^*) = \mu_0 \left(\vec{J}_c + \rho \vec{v} + \frac{\partial \vec{P}^*}{\partial t} + \vec{\nabla} \wedge (\vec{P}^* \wedge \vec{v}) \right)$$

Los significados del campo electromagnético

Como las ecuaciones cinemáticas de Maxwell no dependen de las fuentes, deben ser independientes del movimiento de la materia, y serán las mismas tanto para el observador que se mueve como para el que está en reposo

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{y} \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

El término $\vec{\nabla} \wedge (\vec{P}^* \wedge \vec{v})$ puede ser interpretado como una corriente de magnetización

$$\vec{J}_M = \vec{\nabla} \wedge \vec{M}_P = \vec{\nabla} \wedge (\vec{P}^* \wedge \vec{v})$$

Por tanto, un medio dieléctrico polarizado sin magnetización que se mueve, para un observador en reposo se le aparece con una magnetización

$$\vec{M}_P = \vec{P}^* \wedge \vec{v}$$

junto con un campo magnético

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}_P = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{P}^* \wedge \vec{v}$$

Si tomamos el rotacional se obtiene

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}_c^* + \rho \vec{v}$$

por lo que al campo magnético observado solo contribuyen las corriente de conducción y de convección de las cargas reales.

De las identidades

$$\begin{aligned} 0 \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{B} &= \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{c^2} \vec{E} + \mu_0 \vec{P}^* \right) + \mu_0 \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_c^* + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) + \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \wedge (\vec{P}^* \wedge \vec{v}) \right) = \\ &= \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P})}{\partial t} + \mu_0 \vec{\nabla} \cdot (\vec{J}_c^* + \rho \vec{v}) = \mu_0 \frac{\partial \vec{\nabla} \cdot \vec{D}}{\partial t} + \mu_0 \vec{\nabla} \cdot (\vec{J}_c^* + \rho \vec{v}) \end{aligned}$$

que es la de la continuidad local de la carga para el observador móvil

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{J}_c^* + \rho \vec{v}) \equiv 0$$

que coincide con la ecuación general de conservación para el observador fijo

$$\frac{d\rho}{dt} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$$

Propagación de la luz en dieléctricos móviles

Consideremos ahora que una onda plana monocromática que se propaga por el sistema S del observador fijo en O

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}$$

En un átomo del material situado en $\vec{x}_0$ en $t = 0$, se deslaza de acuerdo con la ecuación $\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{v}t$, y el campo que verá será

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x}_0 + \vec{k} \cdot \vec{v}t - \omega t)}$$

con una frecuencia aparente con un corrimiento Doppler

$$\omega' = \omega - \vec{k} \cdot \vec{v}$$

La constante dieléctrica ϵ será función solo de ω' , ya que está calculada en el sistema S^* que se encuentra en reposo el material.

Si se introduce la ecuación de la onda plana en las ecuaciones de Maxwell se obtienen las condiciones de propagación

$$\begin{aligned} -\vec{k} \wedge \vec{H} &= \omega \vec{D} & \vec{k} \cdot \vec{D} &= 0 \\ -\vec{k} \wedge \vec{E} &= -\omega \vec{B} & \vec{k} \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned}$$

por lo que $\vec{D}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares a $\vec{k}$, y por tanto, a la dirección de propagación de la onda.

Sin embargo, $\vec{E}$ y $\vec{H}$ no son perpendiculares a la dirección de propagación ya que se verifica

$$0 = \vec{k} \cdot \vec{D} = \epsilon_0 \vec{k} \cdot \vec{E} + \vec{k} \cdot \vec{P}^* = \epsilon \vec{k} \cdot \vec{E} + (\epsilon - \epsilon_0) \vec{k} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{B})$$

$$0 = \vec{k} \cdot \vec{B} = \mu_0 \vec{k} \cdot \vec{H} + \mu_0 \vec{k} \cdot \vec{M}_p = \mu_0 \vec{k} \cdot \vec{H} + \mu_0 \vec{k} \cdot (\vec{P}^* \wedge \vec{v})$$

En las anteriores ecuaciones la constante dieléctrica del material que se deslaza $\epsilon = \epsilon(\omega')$ se supone que es función de la frecuencia ω' aparente

El vector Poynting de propagación del flujo de energía vendrá dado por

$$\vec{S} = \vec{E} \wedge \vec{H} = \left(\frac{\vec{D}}{\epsilon_0} - \frac{1}{\epsilon_0} \vec{P}^* \right) \wedge \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{B} \right) = c^2 (\vec{D} - \vec{P}^*) \wedge \vec{B}$$

y por tanto $\vec{S}$ no tiene tampoco está en la dirección de propagación $\vec{k}$.

Tomando a $\vec{D}$ y $\vec{B}$ como variables, el resto de las magnitudes de campo se pueden reescribir en función de ellas

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{1}{\epsilon} \vec{D} - \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) \vec{v} \wedge \vec{B} \\ \vec{P}^* &= \vec{D} - \epsilon_0 \vec{E} = \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) (\vec{D} + \epsilon_0 \vec{v} \wedge \vec{B}) \\ \vec{H} &= \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{P}^* \wedge \vec{v} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) (\vec{D} \wedge \vec{v} - \epsilon_0 (\vec{v} \cdot \vec{B}) \vec{v} + \epsilon_0 \vec{v}^2 \vec{B})\end{aligned}$$

Efecto Fizeau

Si las ecuaciones de las condiciones de propagación de una onda plana en un material móvil se multiplican vectorialmente por $\vec{k}$, se obtiene

$$\begin{aligned}-\omega \vec{k} \wedge \vec{B} &= -\vec{k} \wedge \vec{k} \wedge \vec{E} = \vec{k}^2 \vec{E} - \vec{k} \vec{k} \cdot \vec{E} \\ \omega \vec{k} \wedge \vec{D} &= -\vec{k} \wedge \vec{k} \wedge \vec{H} = \vec{k}^2 \vec{H} - \vec{k} \vec{k} \cdot \vec{H}\end{aligned}$$

Si se desarrolla las dos anteriores ecuaciones en función de $\vec{D}$ y $\vec{B}$ despreciando los términos superiores a v^2/c^2 se obtiene

$$\begin{aligned}-\vec{k} \wedge \vec{B} &= \frac{1}{c\epsilon} \left(\frac{\omega}{c} - \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) \frac{\vec{k} \cdot \vec{v}}{c} \right) \vec{D} \\ -\vec{k} \wedge \vec{D} &= -c\epsilon_0 \left(\frac{\omega}{c} - \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) \frac{\vec{k} \cdot \vec{v}}{c} \right) \vec{B}\end{aligned}$$

Para que estas ecuaciones tengan solución deberá cumplirse la relación de dispersión

$$\left(\frac{\omega}{c} - \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) \frac{|\vec{k}| \cdot \vec{v}}{c} \right)^2 = \left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon} \right)^2 \vec{k}^2$$

La velocidad de fase de propagación de la luz en el dieléctrico, que coincide con la velocidad de la luz de un rayo monocromático de frecuencia ω , será entonces

$$v_f = \frac{\omega}{|\vec{k}|} \approx \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\epsilon}} c - \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) \vec{v} \cdot \vec{n}_{\vec{k}}$$

donde $\vec{k}_u$ es un vector unitario en la dirección $\vec{k}$ de la propagación de la onda

$$\vec{k}_u = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}$$

Se define el índice de refracción aparente como el visto por el material que se desplaza

$$n(\omega') = \sqrt{\frac{\epsilon(\omega')}{\epsilon_0}}$$

que depende de la frecuencia

$$\omega' = \omega - \vec{k} \cdot \vec{v} \approx \omega \left(1 - n \frac{\vec{v} \cdot \vec{k}_u}{c} \right)$$

Si se desarrolla en serie el índice de refracción respecto a la frecuencia se obtiene

$$n(\omega') \approx n(\omega) \left(1 - \frac{dn(\omega)}{d\omega} \frac{\vec{v} \cdot \vec{k}_u}{c} \right)$$

y la velocidad de fase de propagación de la luz se aproximará a

$$v_f = v_{f0} + \left(1 - \frac{1}{n^2(\omega)} + \frac{\omega}{n(\omega)} \frac{dn(\omega)}{d\omega} \right) \vec{v} \cdot \vec{k}_u$$

siendo

$$v_{f0} = \frac{c}{n(\omega)}$$

Las anteriores ecuaciones definen la propagación de la luz en un medio dieléctrico que se desplaza.

Se define como el coeficiente η de Fizeau, o a veces de Fresnel por ser quién primero lo predijo, como

$$\eta = 1 - \frac{1}{n^2(\omega)} + \frac{\omega}{n(\omega)} \frac{dn(\omega)}{d\omega}$$

$$v_f = v_{f0} + \eta \vec{v} \cdot \vec{k}_u$$

Evidentemente el efecto Fizeau tiene un origen relativista. Si la velocidad de fase tiene la dirección del movimiento en un dieléctrico homogéneo no dispersivo con n constante, por la composición relativista de velocidades será

$$v_f = \frac{v + v_{f0}}{1 + \frac{v v_{f0}}{c^2}} \approx (v + v_{f0}) \left(1 - \frac{v v_{f0}}{c^2} \right) = v_{f0} + \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) v$$

Fue Fizeau el primero que comprobó experimentalmente por interferometría que la velocidad un rayo de luz monocromático aumenta en la dirección del movimiento

proporcionalmente a η y al coseno del ángulo que forman rayo de luz con la dirección del movimiento.

Debido al efecto Fizeau, el incremento en el tiempo que tarda un rayo de luz en recorrer un camino de ida y vuelta lo largo de un dieléctrico de longitud l en la dirección del movimiento de su movimiento viene dada por

$$\Delta t = \frac{2ln^3v^2}{c^3}\eta^2$$

Obsérvese que si el rayo de luz se mueve en la dirección perpendicular a movimiento no existe ningún efecto sobre el tiempo de recorrido.

Michelson comprobó por interferometría que la velocidad de la luz en el vacío es la misma para todos los sistemas inerciales independientemente de la velocidad relativa entre ellos.

Estos experimentos fueron posteriormente justificados teóricamente por Einstein con su teoría de la relatividad restringida.

Teoría de Minkowsky del campo electromagnético

En este apartado se analizarán de forma general los efectos electrodinámicos debido a materiales en movimiento. Si los sistemas de observación se mueven relativamente uno respecto a otro, veremos que las componentes del campo eléctrico y magnético no son independientes y que están interrelacionados entre ellos.

Cuando los materiales tienen polarizaciones y magnetizaciones, debido a efectos relativistas, surgen además nuevos efectos y propiedades no predichas por las ecuaciones de Maxwell.

Aunque Minkowsky, definió su espacio vectorial añadiendo una cuarta coordenada imaginaria de tipo temporal para definir sus cuadvectores, esta notación ha quedado obsoleta frente a la notación tensorial covariante que es más general, y que será la que se utilice porque a veces arroja más claridad en los aspectos físicos aplicados. Sin embargo, dentro de la relatividad restringida ambas notaciones son equivalentes.

Seguiremos el desarrollo que hizo Sommerfeld y Pauli para la electrodinámica clásica de los cuerpos en movimiento, en vez de la de Einstein, por ser una notación más compacta, aunque fue este último quién formalizó las importantes interrelaciones entre el campo eléctrico y magnético en sistemas móviles con su teoría de la relatividad restringida.

Se define el espacio de Minkowsky como un espacio vectorial cuatridimensional con las tres coordenadas espaciales y una temporal

$$\bar{x} \stackrel{\text{def}}{=} (x^\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} (x^0, x^1, x^2, x^3) \stackrel{\text{def}}{=} (ct, x, y, z) \stackrel{\text{def}}{=} (ct, \vec{x})$$

con producto interno escalar definido

$$\Delta s^2 \stackrel{\text{def}}{=} g_{\alpha\beta} \Delta x^\alpha \Delta x^\beta = \Delta x^\alpha \Delta x_\beta \stackrel{\text{def}}{=} c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2 d\tau^2$$

donde $g_{\alpha\beta}$ es el tenso métrico del espacio de Minkowski que se puede representar por la matriz diagonal

$$g_{M\alpha\beta} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$$

Ya vimos en teorías vectoriales, que n cuadrivector contravariante $\bar{\Lambda}$ vendrá definido por cuatro componentes, una temporal y tres espaciales

$$\bar{\Lambda} \stackrel{\text{def}}{=} (\Lambda^\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} (\Lambda^0, \Lambda^1, \Lambda^2, \Lambda^3) \stackrel{\text{def}}{=} (\Lambda^0, \vec{\Lambda})$$

Su vector covariante se define por

$$\Lambda_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} g_{\alpha\beta} \Lambda^\beta \stackrel{\text{def}}{=} (\Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3) \stackrel{\text{def}}{=} (\Lambda^0, -\Lambda^1, -\Lambda^2, -\Lambda^3) \stackrel{\text{def}}{=} (\Lambda^0, -\vec{\Lambda})$$

Con el superíndice en griego $\alpha = 0, 1, 2, 3, 4$ nos referiremos de forma genérica a una de las cuatro componentes de espacio de Minkowski.

Con el índice latino $i = 1, 2, 3$ nos referiremos solo a las componentes espaciales.

El producto escalar de dos cuadrivectores $\bar{\Lambda}$ y $\bar{K}$ se define por

$$\bar{\Lambda} \cdot \bar{K} \stackrel{\text{def}}{=} g_{\alpha\beta} \Lambda^\alpha K^\beta \stackrel{\text{def}}{=} \Lambda^0 K^0 - \Lambda^1 K^1 - \Lambda^2 K^2 - \Lambda^3 K^3$$

La subida y baja de índices, se hace a través de tensor métrico

$$g_{M\alpha\beta} = g_M^{\alpha\beta}$$

de la forma

$$K^\alpha = g_M^{\alpha\rho} K_\rho = (K^0, K^1, K^2, K^3)$$

$$K_\alpha = g_{M\alpha\sigma} K^\sigma = (K^0, -K^1, -K^2, -K^3)$$

A K_α se le denomina vector covariante del vector contravariante K^α . Esta distinción es importante cuando el tensor métrico no corresponde a la geometría euclídea como en el caso de la teoría general de la relatividad

Cuando la geometría es euclidiana como en el caso anterior, la diferencia ente vector covariante y contravariante, es sólo de un cambio de signo de sus componentes espaciales. Mientras no se diga lo contrario, consideraremos que el espacio es de tres dimensiones y euclídeo, es decir homogéneo e isótropo.

Los significados del campo electromagnético

Los cuadvectores fundamentales de los potenciales del campo electromagnético y las corrientes se definen como

$$\vec{\mathcal{A}} = (\mathcal{A}^\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} (\phi, c\vec{A}) \quad \vec{\mathcal{J}} = (\mathcal{J}^\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} (c\rho, \vec{J})$$

Ya hemos visto en el capítulo de teorías variacionales, que las ecuaciones de Maxwell están definidas por el tensor fundamental electromagnético $\mathcal{F}$ que se define por

$$\mathcal{F}_{\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} (\partial_\alpha \mathcal{A}_\beta - \partial_\beta \mathcal{A}_\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & E^x & E^y & E^z \\ -E^x & 0 & -cB^z & cB^y \\ -E^y & cB^z & 0 & -cB^x \\ -E^z & -cB^y & cB^x & 0 \end{pmatrix}$$

Para medios materiales el tensor $\mathcal{H}$ electromagnético se define como

$$\mathcal{H}_{\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & cD^x & cD^y & cD^z \\ -cD^x & 0 & -H^z & H^y \\ -cD^y & H^z & 0 & -H^x \\ -cD^z & -H^y & H^x & 0 \end{pmatrix}$$

Para medios homogéneos entre los tensores $\mathcal{F}_{\alpha\beta}$ y $\mathcal{H}_{\alpha\beta}$ existirá la relación

$$\mathcal{H}_{\alpha\beta} = \vartheta \mathcal{F}_{\alpha\beta}$$

donde $\vartheta = c\epsilon$ para las componentes espaciales, y $\vartheta = \frac{\mu}{c}$ para las componentes temporales. Lo anterior, se puede expresar también en la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\alpha 0} &= c\epsilon \mathcal{F}_{\alpha 0} \\ \epsilon^{\alpha\beta\mu\sigma} \mathcal{F}_{\alpha\beta} g_{\mu\sigma} &= \frac{\mu}{c} \epsilon^{\alpha\beta\mu\sigma} \mathcal{F}_{\alpha\beta} g_{\mu\sigma} \end{aligned}$$

Los tensores en el espacio de Minkowski los representaremos con una doble barra, con índices en griego.

$$\begin{aligned} \vec{E} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathcal{F}_{01}, \mathcal{F}_{02}, \mathcal{F}_{03}) & \quad c\vec{B} \stackrel{\text{def}}{=} -(\mathcal{F}_{23}, \mathcal{F}_{31}, \mathcal{F}_{12}) \\ c\vec{D} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathcal{H}_{01}, \mathcal{H}_{02}, \mathcal{H}_{03}) & \quad \vec{H} \stackrel{\text{def}}{=} -(\mathcal{H}_{32}, \mathcal{H}_{31}, \mathcal{H}_{21}) \end{aligned}$$

También es posible escribirlas como

$$\mathcal{E}^i = \mathcal{F}_{0i} \quad \text{y} \quad cB^i = -\frac{1}{2} \epsilon^{ikl} \mathcal{F}_{kl} \quad \text{o} \quad \mathcal{F}_{kl} = -\epsilon_{kli} cB^i$$

Los tensores forma duales, vimos que se pueden definir como

$$\mathcal{F}^{*\alpha\beta} = \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \mathcal{F}_{\gamma\delta} \quad \text{y} \quad \mathcal{H}^{*\alpha\beta} = \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \mathcal{H}_{\gamma\delta}$$

O también

$$cB^i = \mathcal{F}_{0i}^* \quad y \quad E^i = \frac{1}{2} \varepsilon^{ikl} \mathcal{F}_{kl}^* \quad o \quad \mathcal{F}_{kl}^* = \varepsilon_{kli} E^i$$

Además se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{0i} &= -\mathcal{F}_{0i} & \mathcal{F}^{kl} &= \mathcal{F}_{kl} \\ \mathcal{F}^{*0i} &= -\mathcal{F}^{*0i} & \mathcal{F}^{*kl} &= \mathcal{F}_{kl}^* \end{aligned}$$

Todo esto es equivalente en la representación matricial en función de las variables del campo electromagnético, a hacer los cambios

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{\alpha\beta} &\rightarrow \mathcal{F}^{*\alpha\beta} \Rightarrow \vec{E} \rightarrow c\vec{B} & c\vec{B} &\rightarrow -\vec{E} \\ \mathcal{H}^{\alpha\beta} &\rightarrow \mathcal{H}^{*\alpha\beta} \Rightarrow c\vec{D} \rightarrow \vec{H} & \vec{H} &\rightarrow -c\vec{D} \end{aligned}$$

Daremos la forma explícita del tenso electromagnético para las subidas de índices, ya que serán utilizadas frecuentemente

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\alpha\beta} &= \begin{pmatrix} 0 & E^x & E^y & E^z \\ -E^x & 0 & -cB^z & cB^y \\ -E^y & cB^z & 0 & -cB^x \\ -E^z & -cB^y & cB^x & 0 \end{pmatrix} & \mathcal{F}^{\alpha\beta} &= \begin{pmatrix} 0 & -E^x & -E^y & -E^z \\ E^x & 0 & -cB^z & cB^y \\ E^y & cB^z & 0 & -cB^x \\ E^z & -cB^y & cB^x & 0 \end{pmatrix} \\ \mathcal{F}^{\alpha}_{\beta} &= \begin{pmatrix} 0 & E^x & E^y & E^z \\ E^x & 0 & cB^z & -cB^y \\ E^y & -cB^z & 0 & cB^x \\ E^z & cB^y & -cB^x & 0 \end{pmatrix} & \mathcal{F}_{\beta}^{\alpha} &= \begin{pmatrix} 0 & -E^x & -E^y & -E^z \\ -E^x & 0 & cB^z & -cB^y \\ -E^y & -cB^z & 0 & cB^x \\ -E^z & cB^y & -cB^x & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

De igual forma para $\mathcal{H}_{\alpha\beta}$ haciendo los cambios

$$\mathcal{F}_{\alpha\beta} \rightarrow \mathcal{H}_{\alpha\beta} \Rightarrow \vec{E} \rightarrow c\vec{D} \quad c\vec{B} \rightarrow \vec{H}$$

Los tensores antisimétricos, como el tensor electromagnético, tienen una serie de propiedades unas propiedades que ya analizamos en el capítulo de teorías dinámicas.

En adelante seguiremos la convención de subíndices griegos cuando toman los valores cudrimensionales 0,1,2,3 y denotaremos con subíndices latinos cuando tomen los valores espaciales tridimensionales 1,2,3. Se sigue el convenio de Einstein de sumar los índices para todos sus valores cuando aparecen dos iguales en una misma ecuación.

Las componentes del campo eléctrico y magnético vendrán dadas por

$$\begin{aligned} E^i &= -\frac{\partial \phi}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial t} \equiv -\frac{\partial \mathcal{A}^0}{\partial x^i} - \frac{\partial \mathcal{A}^i}{\partial x^0} \\ cB^i &= \frac{\partial \mathcal{A}^k}{\partial x^j} - \frac{\partial \mathcal{A}^j}{\partial x^k} \end{aligned}$$

Los significados del campo electromagnético

De igual forma, las ecuaciones de Maxwell para el vector de desplazamiento eléctrico se pueden reescribir de la forma

$$\frac{\partial D^i}{\partial t} = -J^i + \left(\frac{\partial H^k}{\partial x^j} - \frac{\partial H^j}{\partial x^k} \right) \rightarrow \frac{\partial \mathcal{H}^{i\beta}}{\partial x^\beta} = J^i$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \rightarrow \frac{\partial \mathcal{H}^{\beta 0}}{\partial x^\beta} = J^0$$

Las dos anteriores ecuaciones se pueden reagrupar en una única expresión para las ecuaciones dinámicas de Maxwell en medios materiales

$$\frac{\partial \mathcal{H}^{\alpha\beta}}{\partial x^\alpha} = J^\beta$$

Obsérvese que de la anterior ecuación al ser $\mathcal{H}^{\alpha\beta}$ un tensor antisimétrico se deduce la identidad

$$\partial_\alpha J^\alpha \equiv 0$$

que representa la ecuación de continuidad local de la carga.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{J} = 0$$

La conservación de la carga que ya está contenida implícitamente en las dinámicas de Maxwell.

Debido a que el tensor electromagnético $\mathcal{F}^{\alpha\beta}$ es antisimétrico, las ecuaciones cinemáticas de Maxwell para el campo electromagnético, como ya hemos visto, vienen dadas por

$$\frac{\partial \mathcal{F}^{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial \mathcal{F}^{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial \mathcal{F}^{\gamma\alpha}}{\partial x^\beta} = 0$$

donde $\alpha\beta\gamma\delta$ es una permutación cíclica de los índices 1234.

Las anterior ecuaciones se reescribe también en función del tensor dual como

$$\frac{\partial \mathcal{F}^{*\alpha\beta}}{\partial x^\alpha} = 0$$

De la anterior ecuación, se deduce que el tensor electromagnético $\mathcal{F}_{\alpha\beta}$ en el vacío verifica la ecuación

$$\partial^\mu \partial_\mu \mathcal{F}_{\alpha\beta} = \frac{1}{c\epsilon_0} (\partial_\alpha J_\beta - \partial_\beta J_\alpha)$$

habiéndose definido

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \equiv \partial^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} g^{\alpha\mu} \partial_\mu = g^{\alpha\mu} \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

por lo que el operador d'alambertiano, que es un invariante de Poincaré, expresa como un producto escalar

$$-\partial^\mu \partial_\mu \equiv \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

En función de los potenciales, la anterior ecuación d'alambertiana adopta la expresión

$$\partial^\mu \partial_\mu \mathcal{A}^\beta + \partial^\beta \partial_\mu \mathcal{A}^\mu = \frac{\mathcal{J}^\beta}{c\epsilon_0}$$

La solución de la anterior ecuación con las condiciones de contorno adecuadas nos determina completamente el campo electromagnético.

Si se separa las componentes espaciales de las temporales, y teniendo en cuenta la definición del tensor electromagnético $\mathcal{F}_{\alpha\beta} = \mathcal{A}_{\beta,\alpha} - \mathcal{A}_{\alpha,\beta}$, se obtiene para los potenciales en el vacío las ecuaciones

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathcal{A} - \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \mathcal{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = -\mu_0 \vec{J}$$

237

$$\nabla^2 \phi + \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Puesto que las $\mathcal{A}^\alpha$ están definidas excepto en el gradiente de un escalar, podemos tomar el gauge de Lorentz

$$\frac{\partial \mathcal{A}^\alpha}{\partial x^\alpha} = 0$$

con lo que la d'alambertiana para los potenciales se reduce a la expresión

$$\partial^\mu \partial_\mu \mathcal{A}^\beta = \frac{\mathcal{J}^\beta}{c\epsilon_0}$$

Si en la ecuación para el tensor electromagnético se utiliza su definición en función de los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$, se obtiene las ecuaciones de ondas en el vacío

$$\begin{aligned} \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{E} &= + \left(\vec{\nabla} \rho + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} \right) \\ \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{B} &= -\mu_0 \vec{J} \end{aligned}$$

Los significados del campo electromagnético

Asignaremos las componentes de la densidad de fuerza de Lorentz la parte espacial de un cuadrivector

$$\vec{f}_L = \rho(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

y la energía eléctrica disipada $\rho \vec{v} \cdot \vec{E}$ como su cuarta componente temporal

$$c\mathcal{K}^0 = \rho \vec{v} \cdot \vec{E}$$

Se define la densidad de fuerza de Minkowsky como el cuadrivector

$$\bar{\mathcal{K}} = \left(\frac{1}{c} \rho \vec{v} \cdot \vec{E}, \rho(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \right) = \left(\frac{1}{c} \rho \vec{v} \cdot \vec{E}, \vec{f}_L \right)$$

de verifica entonces la ecuación

$$\bar{\mathcal{F}} = \gamma \bar{\mathcal{K}} = (\gamma \mathcal{K}^\alpha) = \frac{1}{c} \mathcal{F}_{\alpha\beta} \mathcal{J}^\beta$$

Debemos hacer la observación, de que solo $\gamma \bar{\mathcal{K}}$ es, en realidad un cuadrivector covariante ante las transformaciones relativistas de Lorentz.

Reagrupando las anteriores ecuaciones, las ecuaciones de Maxwell con fuentes y las leyes experimentales que las definen, con la notación de Minkowsky vienen representadas por

$$\mathcal{F}_{\alpha\beta} = (\partial_\alpha \mathcal{A}_\beta - \partial_\beta \mathcal{A}_\alpha)$$

Definición del tensor electromagnético

$$\frac{\partial \mathcal{H}^{\alpha\beta}}{\partial x^\alpha} = \mathcal{J}^\beta$$

Ley de Coulomb + Ley de Ampère + conservación carga

$$\frac{\partial \mathcal{F}^{*\alpha\beta}}{\partial x^\alpha} = 0$$

Ley de Faraday + Ausencia de polos magnéticos

$$\mathcal{F}^\alpha = \gamma \mathcal{K}^\alpha = \frac{1}{c} \mathcal{F}_{\beta}^{\alpha} \mathcal{J}^\beta$$

Fuerza de Lorentz + Energía eléctrica disipada

$$\partial_\alpha \mathcal{J}^\alpha \equiv 0$$

Ley de la conservación de de la carga local

A partir los anteriores cuadrivectores, se pueden construir los siguientes invariantes de Lorentz

$$\frac{1}{2} \mathcal{F}_{\alpha\beta} \mathcal{F}^{\alpha\beta} = \vec{E}^2 - c^2 \vec{B}^2$$

$$\frac{1}{4} \mathcal{F}_{\alpha\beta} \mathcal{F}^{*\alpha\beta} = c \vec{E} \cdot \vec{B}$$

$$\frac{1}{2} \mathcal{H}_{\alpha\beta} \mathcal{H}^{\alpha\beta} = c^2 \vec{D}^2 - \vec{H}^2$$

$$\frac{1}{4} \mathcal{H}_{\alpha\beta} \mathcal{H}^{*\alpha\beta} = c \vec{D} \cdot \vec{H}$$

$$\frac{1}{2} \mathcal{F}_{\alpha\beta} \mathcal{H}^{\alpha\beta} = c \vec{E} \cdot \vec{D} - c \vec{B} \cdot \vec{H}$$

$$\frac{1}{2} \mathcal{F}_{\alpha\beta} \mathcal{H}^{*\alpha\beta} = \vec{E} \cdot \vec{H} + c^2 \vec{B} \cdot \vec{D}$$

La densidad lagrangiana electromagnética vendrá dada por

$$\mathcal{L}_{em} = \frac{1}{2c} \mathcal{F}_{\alpha\beta} \mathcal{H}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} - c \vec{B} \cdot \vec{H})$$

Estas magnitudes, respecto a cualquier sistema inercial con movimiento relativo uniforme, mantienen invariante su valor.

Si es $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$ o $c^2 \vec{B}^2 = \vec{E}^2$ en un sistema, serán también perpendiculares o conservarán su igualdad en cualquier otro sistema de inercia, tal como sucede en la propagación de las ondas electromagnéticas.

Si $c^2 \vec{B}^2 - \vec{E}^2 > 0$ en un sistema, entonces existe un sistema en que $\vec{E} = 0$ y solo existe campo magnético.

De igual forma, si $c^2 \vec{B}^2 - \vec{E}^2 < 0$, entonces existe un sistema en que $\vec{B} = 0$ y solo exista campo eléctrico. Sin embargo si $c^2 \vec{B}^2 - \vec{E}^2 \neq 0$, siempre existe un sistema.

Ecuaciones de Maxwell en medios materiales estacionarios

Es fácil generalizar los resultados anteriores para incluir las polarizaciones y magnetizaciones en medios dieléctricos y magnéticos.

Con los subíndices P y M , denotaremos los efectos debidos las polarizaciones y magnetizaciones de los materiales.

Se definen los cuadvectores y tensores de polarización magnetización

$$\vec{J}_M = (c\rho_P \vec{J}_M + \vec{J}_P) = (-c \text{div} \vec{P}, \text{rot} \vec{M} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t})$$

El tensor de polarización y magnetización $\vec{M}$ se define como

$$M^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & cP_x & cP_y & cP_z \\ -cP_x & 0 & -M_z & M_y \\ -cP_y & M_z & 0 & -M_x \\ -cP_z & -M_y & M_x & 0 \end{pmatrix}$$

donde $\vec{P}, \vec{M}$ son la polarización y la magnetización del medio, ρ_P es la densidad de carga de polarización y $\vec{J}_P, \vec{J}_M$ son la corrientes de polarización y magnetización.

Se verificará entonces

$$\frac{\partial \mathcal{M}^{\alpha\beta}}{\partial x^\alpha} = J_M^\beta$$

Las ecuaciones de Maxwell en función del tensor electromagnético vendrán entonces dadas por

$$\frac{\partial \mathcal{F}^{\alpha\beta}}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{c\epsilon_0} (J^\beta + J_M^\beta) = \frac{1}{c\epsilon_0} J^\beta + \frac{1}{c\epsilon_0} \frac{\partial \mathcal{M}^{\alpha\beta}}{\partial x^\alpha}$$

Si definimos como es habitual en electromagnetismo

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad \text{y} \\ \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

entonces, las ecuaciones de Maxwell en medios materiales dieléctricos y magnéticos se reescribirán de la forma

$$\frac{\partial \mathcal{H}^{\alpha\beta}}{\partial x^\alpha} = J^\beta$$

que define las ecuaciones de Maxwell para $\vec{H}$ y $\vec{D}$ en medios materiales.

Al ser $\mathcal{M}^{\alpha\beta}$ antisimétrico se verifica obviamente la identidad

$$\partial_\alpha J_M^\beta \equiv 0$$

que es la ecuación de continuidad de la conservación de la carga con

$$\rho = -\text{div } \vec{P} \quad \text{y} \\ \vec{j} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

La ecuación d'alambertiana para el tensor electromagnético será

$$\partial^\mu \partial_\mu \mathcal{F}^{\alpha\beta} = \frac{1}{c\epsilon_0} (\partial_\alpha (J^\beta + J_M^\beta) - \partial_\beta (J^\alpha + J_M^\alpha))$$

y para los potenciales

$$\partial^\mu \partial_\mu \mathcal{A}^\beta + \partial^\beta \partial_\mu \mathcal{A}^\mu = \frac{1}{c\epsilon_0} (J^\beta + J_M^\beta) = \frac{1}{c\epsilon_0} J^\beta + \frac{1}{c\epsilon_0} \frac{\partial \mathcal{M}^{\alpha\beta}}{\partial x^\alpha}$$

Potenciales de Hertz y campos de radiación dipolar eléctrica y magnética

Se define los potenciales de Hertz $\vec{\Pi}_P$ y $\vec{\Pi}_M$ y su tensor asociado $\bar{\Pi}$ como

$$\bar{\Pi} = \Pi^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & \Pi_P^x & \Pi_P^y & \Pi_P^z \\ -\Pi_P^x & 0 & -\Pi_M^z & \Pi_M^y \\ -\Pi_P^y & \Pi_M^z & 0 & -\Pi_M^x \\ -\Pi_P^z & -\Pi_M^y & \Pi_M^x & 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\Pi}_P = (\Pi_P^\beta) = \Pi_P^{0\beta} \quad y \quad \vec{\Pi}_M = (\Pi_M^\beta) = \Pi_M^{0\beta}$$

El potencial de Hertz es muy utilizado en la resolución de problemas de radiación electromagnética, cuando las fuentes son solo debidas a corrientes de polarizaciones $\vec{J}_M$.

Consideremos también el caso medios no magnéticos en que

$$\vec{M} = 0 \quad y \quad \vec{\Pi}_M = 0$$

Definimos en este caso los potenciales electromagnéticos en función del potencial de Hertz por la expresión

$$\mathcal{A}^\beta = \partial_\alpha \Pi^{\alpha\beta}$$

que es equivalente a las ecuaciones en forma vectorial

$$\vec{A} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{\Pi}_P}{\partial t} \quad y \quad \phi = -\text{div} \vec{\Pi}_P$$

Obsérvese que los potenciales verificas la condición de Lorentz

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

La ecuación d'alambertiana para los potenciales tomará la expresión

$$\partial^\mu \partial_\mu \partial_\sigma \Pi^{\sigma\beta} + \partial^\beta \partial_\mu \partial_\sigma \Pi^{\sigma\mu} = \partial^\mu \partial_\mu \partial_\sigma \Pi^{\sigma\beta} = \frac{1}{c\epsilon_0} \frac{\partial \mathcal{M}^{\sigma\beta}}{\partial x^\sigma}$$

por lo que se verificará entonces la igualdad

$$\partial^\mu \partial_\mu \Pi^{\alpha\beta} = \frac{1}{c\epsilon_0} \mathcal{M}^{\alpha\beta}$$

que es equivalente a la ecuación de ondas

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{\Pi}_P = -\frac{1}{\epsilon_0} \vec{P}$$

cuya solución ya las hemos estudiado en el capítulo de teorías espectrales para los potenciales retardados.

El campo electromagnético vendrá dado en este caso por

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{\Pi}_P + \frac{c}{\epsilon_0} \vec{P} \\ \vec{B} &= \frac{1}{c^2} \partial_t \vec{\nabla} \wedge \vec{\Pi}_P \end{aligned}$$

Si consideremos el caso particular de un dipolo oscilante a una sola frecuencia ω_0 situado en el origen

$$\vec{P}(\vec{x}, t) = \delta(\vec{x}) \vec{p}_0 e^{-i\omega_0 t}$$

entonces el potencial de Hertz verifica la ecuación de Helmholtz

$$\left(\nabla^2 + \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \right) \vec{\Pi}(\vec{x}, t) = -\frac{\vec{p}_0}{\epsilon_0} \delta(\vec{x})$$

Aplicando la función de Green retardada ya estudiada, el potencial de Hertz vendrá dado por

$$\vec{\Pi}_P(\vec{x}, t) = \frac{\vec{p}_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{i\left(\frac{\omega_0}{c}|\vec{x}| - \omega_0 t\right)}}{|\vec{x}|}$$

Los potenciales electromagnéticos serán entonces

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{x}, t) &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{\Pi}_P}{\partial t} = -\frac{i\omega_0}{4\pi c^2 \epsilon_0} \frac{e^{i\left(\frac{\omega_0}{c}|\vec{x}| - \omega_0 t\right)}}{|\vec{x}|} \vec{p}_0 \\ \phi &= -\text{div} \vec{\Pi}_P = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{i\omega_0}{c|\vec{x}|} - \frac{1}{|\vec{x}|^2} \right) \vec{x}_u \cdot \vec{p}_0 e^{i\left(\frac{\omega_0}{c}|\vec{x}| - \omega_0 t\right)} \end{aligned}$$

El campo electromagnético de radiación será entonces

$$\vec{E} = \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{\Pi}_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\omega_0}{c} \right)^2 \frac{e^{i\left(\frac{\omega_0}{c}|\vec{x}| - \omega_0 t\right)}}{|\vec{x}|} \vec{x}_u \wedge \vec{p}_0 \wedge \vec{x}_u$$

$$-\frac{i}{2\pi\epsilon_0}\left(\frac{\omega_0}{c}\right)\frac{e^{i(\frac{\omega_0}{c}|\vec{x}|-\omega_0 t)}}{|\vec{x}|^2}(\vec{p}_0 - \vec{x}_u \wedge \vec{p}_0 \wedge \vec{x}_u)$$

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \frac{1}{c^2} \partial_t \vec{\nabla} \wedge \vec{\Pi}_p = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \frac{1}{4\pi c \epsilon_0} \left(\frac{\omega_0}{c}\right)^2 \frac{e^{i(\frac{\omega_0}{c}|\vec{x}|-\omega_0 t)}}{|\vec{x}|} \vec{x}_u \wedge \vec{p}_0 \\ &\quad + \frac{i\omega_0}{4\pi c^2 \epsilon_0} \frac{e^{i(\frac{\omega_0}{c}|\vec{x}|-\omega_0 t)}}{|\vec{x}|^2} \vec{x}_u \wedge \vec{p}_0\end{aligned}$$

El campo electromagnético en la zona de radiación lejana en que $x\omega_0/c \gg 1$ y los efectos de retardo son despreciables, decaen como $1/r$, y vendrán dados por

$$\begin{aligned}\vec{E}_{rad} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\omega_0}{c}\right)^2 \frac{e^{i(\frac{\omega_0}{c}|\vec{x}|-\omega_0 t)}}{|\vec{x}|} \vec{x}_u \wedge \vec{p}_0 \wedge \vec{x}_u \\ \vec{B}_{rad} &= \frac{1}{4\pi c \epsilon_0} \left(\frac{\omega_0}{c}\right)^2 \frac{e^{i(\frac{\omega_0}{c}|\vec{x}|-\omega_0 t)}}{|\vec{x}|} \vec{x}_u \wedge \vec{p}_0 = \frac{1}{c} \vec{x}_u \wedge \vec{E}_{rad}\end{aligned}$$

Si el dipolo es una carga oscilante, será

$$\begin{aligned}i\omega_0 \vec{p}_0 &= \dot{\vec{d}} = q\vec{v} \quad \text{y} \\ -\omega_0^2 \vec{p}_0 &= \ddot{\vec{d}} = q\vec{a}\end{aligned}$$

donde $\vec{v}$ y $\vec{a}$ son la velocidad y la aceleración de la carga, con lo que tendremos

$$\begin{aligned}\vec{E}_{rad}(\vec{x}, t) &= \frac{q}{4\pi c^2 \epsilon_0} \frac{\vec{x}_u \wedge \vec{x}_u \wedge \vec{a}}{|\vec{x}|} \\ c\vec{B}_{rad}(\vec{x}, t) &= \vec{x}_u \wedge \vec{E}_{rad}\end{aligned}$$

La distribución de la energía radiada viene determinada por el vector Poynting

$$\vec{S}_{rad}(\vec{x}, t) = c^2 \epsilon_0 \vec{E}_{rad} \wedge \vec{B}_{rad} = \frac{q^2}{(4\pi)^2 c^3 \epsilon_0} \frac{(\vec{x}_u \wedge \vec{a})^2}{|\vec{x}|^2}$$

Si integramos el flujo sobre una esfera de radio $|\vec{x}| = R$, poniendo

$$(\vec{x}_u \wedge \vec{a})^2 = \vec{a}^2 \sin^2(\theta)$$

obtenemos

$$\oint_S \vec{S}_{rad} \cdot d\vec{S} = \frac{q^2 \vec{a}^2}{(4\pi)^2 c^3 \epsilon_0} \oint_S |\vec{S}_{rad}| 2\pi \sin^2(\theta) d\theta = \frac{q^2 \vec{a}^2}{6\pi \epsilon_0 c^3} = \frac{\ddot{p}^2}{6\pi \epsilon_0 c^3}$$

expresión que ya fue ya obtenida en el capítulo de teorías vectoriales y espectrales, por otros procedimiento distintos.

Consideremos ahora de un medio solo magnético en que

$$\vec{P} = 0 \quad y$$

$$\vec{\Pi}_p = 0$$

Definimos en este caso los potenciales electromagnéticos en función del potencial de Hertz por la expresión

$$\mathcal{A}^\beta = \partial_\alpha \Pi^{\alpha\beta}$$

lo que es equivalente a las ecuaciones vectoriales

$$\vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{\Pi}_M \quad y \quad \phi = -\text{div} \vec{\Pi}_M$$

La ecuación d'alambertiana para los potenciales de Hertz tomará la expresión

$$\partial^\mu \partial_\mu \Pi^{\alpha\beta} = \frac{1}{c\epsilon_0} \mathcal{M}^{\alpha\beta}$$

que es equivalente a la ecuación de ondas

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{\Pi}_M = \frac{1}{c\epsilon_0} \vec{M}$$

El campo electromagnético vendrá dado en este caso por

$$\vec{E} = \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{\Pi}_M + \nabla^2 \vec{\Pi}_M - \partial_t \vec{\nabla} \wedge \vec{\Pi}_M$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{\Pi}_M$$

Si consideramos ahora un dipolo magnético puntual oscilante

$$\vec{M}(\vec{x}, t) = \delta(\vec{x}) \vec{m}_0 e^{-i\omega_0 t}$$

la ecuación de ondas para el potencial de Hertz tiene como solución

$$\vec{\Pi}_M(\vec{x}, t) = \frac{\vec{m}_0}{4\pi c\epsilon_0} \frac{e^{i(\frac{\omega_0}{c}|\vec{x}| - \omega_0 t)}}{|\vec{x}|}$$

Los potenciales vendrán dados en este caso por

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{\vec{x}_u \wedge \vec{m}_0}{4\pi c\epsilon_0} \left(\frac{i\omega_0}{c|\vec{x}|} - \frac{1}{|\vec{x}|^2} \right) e^{i(\frac{\omega_0}{c}|\vec{x}| - \omega_0 t)}$$

$$\phi(\vec{x}, t) = -\frac{1}{4\pi c\epsilon_0} \left(\frac{i\omega_0}{c|\vec{x}|} - \frac{1}{|\vec{x}|^2} \right) \vec{x}_u \cdot \vec{m}_0 e^{i(\frac{\omega_0}{c}|\vec{x}| - \omega_0 t)}$$

Tensor de energía impulso de Minkowski

El tensor de energía impulso del campo electromagnético se define por

$$T_c^{\alpha\beta} = \frac{1}{c} \mathcal{F}^\alpha_\mu \mathcal{H}^{\mu\beta} - \delta^{\alpha\beta} \frac{1}{2c} \mathcal{H}^{\mu\sigma} \mathcal{F}_{\mu\sigma}$$

La densidad de fuerza de Lorentz generalizada vendrá dada por

$$\mathcal{K}_c^\beta = -\partial_\beta T_c^{\alpha\beta}$$

Obsérvese que $T_c^{\alpha\beta}$ tiene el signo invertido respecto a otras definiciones habituales del tensor energía impulso $T_c^{\alpha\beta}$. Con esta convención, $\mathcal{K}_c^\beta$ es la fuerza ejercida por sistema del campo electromagnético sobre el sistema de la materia, cuando ambos forman un sistema aislado cerrado. Si $T_m^{\alpha\beta}$ es el tensor de energía impulso de la materia por ser el conjunto un sistema cerrado, se debe verificar

$$\partial_\beta (T_m^{\alpha\beta} + T_c^{\alpha\beta}) \equiv 0$$

o lo que lo mismo

$$\mathcal{K}_m^\beta = \partial_\beta T_m^{\alpha\beta} = -(-\partial_\beta T_c^{\alpha\beta}) = -\mathcal{K}_c^\beta$$

que es una expresión equivalente al principio de acción y reacción, ya que $\mathcal{K}_m$ es la fuerza que ejerce la materia sobre el sistema del campo electromagnético.

De forma explícita las componentes del tensor energía impulso serán

$$\begin{aligned} T_c^{00} = \omega_c &= \frac{1}{2} (\vec{D} \cdot \vec{E} + \vec{H} \cdot \vec{B}) & T_c^{ij} = T_M^{ij} &= E^i D^j + B^i H^j - \omega_c \delta^{ij} \\ T_c^{0i} = \frac{1}{c} S_c^i &= -\frac{1}{c} (\vec{E} \wedge \vec{H})^i & T_c^{i0} = c g_c^i &= -\frac{i}{c} (\vec{D} \wedge \vec{B})^i \end{aligned}$$

Donde ω_c es la densidad de energía del campo electromagnético, $\vec{S}_c$ es el flujo de energía, y $\vec{g}_c$ es la densidad de momento del campo electromagnético, por lo que existe una relación de proporcionalidad entre ellos.

El tensor de energía impulso se puede esquematizar matricialmente de la forma:

$$T_c^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \omega & \vec{S}_c/c \\ c\vec{g}_c & -\vec{T}_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega & \vec{S}_c/c \\ c\vec{D} \wedge \vec{B} & -\vec{T}_M \end{pmatrix}$$

siendo T_M^{ij} el tensor de Maxwell

Obsérvese que la suma de los elementos diagonales es nula

$$T_c^{\alpha\alpha} = 0$$

y que, además

$$\mathcal{K}_c^0 = -\frac{1}{c} \vec{\nabla} \cdot \vec{S}_c + \frac{\partial w_c}{\partial x^4} \Rightarrow \frac{\partial w_c}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S}_c + \rho \vec{v} \cdot \vec{E} = 0$$

que representa la conservación de la energía, ya que $\rho \vec{v} \cdot \vec{E}$ es el trabajo realizado por el campo electromagnético sobre la materia, y

$$f_L^i = -\frac{\partial T_c^{ij}}{\partial x^j} = \frac{\partial T_M^{ij}}{\partial x^j} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial S_c^i}{\partial t} = \frac{\partial T_M^{ij}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_c^i}{\partial t}$$

nos relaciona la densidad de fuerza de Lorentz en función de la derivada del tensor energía impulso.

$\vec{T}_c$ es la generalización relativista, del tensor de esfuerzos de Maxwell del electromagnetismo clásico.

Obsérvese que, incluso en ausencia de cargas, existe siempre una tensión debida a la presencia del campo electromagnético, debida a que el campo electromagnético tiene asociado una densidad de momento lineal $\vec{g}$

$$\vec{g} = \vec{D} \wedge \vec{B}$$

Solo en el vacío o fuera de materiales dieléctricos y magnético en donde $\epsilon = \epsilon_0$ y $\mu = \mu_0$ es

$$\vec{g}_c = \vec{S}_c / c^2$$

y se encuentran relacionadas con la densidad de energía por las relaciones

$$|\vec{g}_c| = \frac{w_c}{c} \quad y$$

$$|\vec{S}_c| = c w_c$$

El campo electromagnético posee una energía y momento localizados en el espacio y, como veremos además posee momento angular. Por esta razón al tensor de energía impulso se le denomina también de esfuerzos.

En el caso de presencia de medios materiales las ecuaciones de Maxwell, como hemos visto adoptan la forma

$$\frac{\partial \mathcal{F}^{*\alpha\beta}}{\partial x^\alpha} = 0 \quad y$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}^{\alpha\beta}}{\partial x^\alpha} = \mathcal{J}^\beta$$

El tensor de energía momento que en presencia de materiales viene dado por

$$\bar{T}_c = \begin{pmatrix} w & \frac{1}{c} \vec{S} \\ \frac{1}{c} \frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0} \vec{S} & -\bar{T}_M \end{pmatrix}$$

es conocido también como tensor de Minkowski.

En presencia de materiales, el tensor de Minkowski es antisimétrico, lo que da lugar a la existencia de momentos angulares, aunque en general son muy pequeños y difícilmente observables.

La densidad de momento lineal en presencia de materiales toma la expresión

$$\vec{g} = \vec{D} \wedge \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0} \vec{S}$$

La anterior teoría de Minkowski para el caso de medios materiales no fue aceptada por toda la comunidad científica, debido a la asimetría del tensor de energía en medios materiales. Para algunos científicos, la extrapolación de las ecuaciones mediante las constantes homogéneas de los materiales ϵ, μ , no son más que abstracciones sin realidad física.

Durante mucho tiempo se ha utilizado una simetrización del tensor, no aceptado tampoco por todos. Sin embargo, actualmente se reconoce que realmente la única exigencia que se debe poner al tensor de energía-momento en la materia, es que la fuerza de Minkowsky $\bar{T}_c$ reproduzca la fuerza de Lorentz correcta sobre un volumen de materia.

Otro argumento que se da en contra es que la teoría presentada no es totalmente covariante. Veremos más adelante que existen otras formulaciones alternativas más rigurosas, como la formulación relativista covariante que profundiza más en la estructura del electromagnetismo. Sin embargo, las constantes de las ecuaciones de constitución (permeabilidad, constante dieléctrica y conductividad) tienen que ser definidas en el sistema con el material en reposo, y la formulación covariante de dichas constantes es demasiado compleja.

Para Möller, la asimetría del tensor de energía momento electromagnético proviene que el sistema no es cerrado energéticamente, ya que se está realizando un trabajo

$\rho \vec{v} \cdot \vec{E}$ sobre la materia y se está generando calor por efecto Joule. Veremos en teorías covariantes que esto hace que haya que modificar las ecuaciones, y que el tensor total del sistema cerrado es simétrico con divergencia nula cuando se tiene en cuenta la parte de la materia.

Para los medios materiales homogéneos, siempre ha existido un debate sobre si algunas de las expresiones matemáticas tienen una realidad física, aparte de ser una herramienta matemática útil para la resolución matemática de problemas, como es el caso de las corrientes de polarización y magnetización superficiales, que más adelante comentaremos ampliamente.

La complejidad del tratamiento del electromagnetismo en materiales en movimiento, se puede ver en su aplicación a casos simples, como los movimientos rectilíneos uniformes, en que las relaciones de constitución observadas ya no tienen el significado simple de proporcionalidad para un sistema en reposo.

Se analizará todo esto con detalle en el capítulo de las teorías covariantes.

Ecuaciones de Maxwell en medios materiales móviles. Relaciones de constitución de Minkowski

Veamos ahora como se transforman las ecuaciones del campo electromagnético al pasar de un sistema de referencia S fijo a otro S' , que se mueve con un medio material a velocidad $\vec{v}$ respecto a S , en la dirección del eje x' . Este problema fue analizado primero por Einstein en su teoría de la relatividad restringida. Aquí emplearemos la notación de Minkowsky, y seguiremos el análisis realizado por Sommerfeld.

En el caso de que el sistema S' se desplace con velocidad uniforme v respecto al sistema S , el paso de las coordenadas de un sistema a otro viene dado por una transformación de Lorentz

$$\Lambda^\alpha = \mathcal{L}^\alpha_\beta \Lambda^\beta$$

Siendo

$$\mathcal{L}^\alpha_\beta = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad y \quad \beta = \frac{v}{c}$$

O de forma explícita

$$\begin{aligned} \Lambda^{0'} &= \gamma \left(\Lambda^0 - \frac{v}{c} \Lambda^1 \right) \\ \Lambda^{1'} &= \gamma \left(\Lambda^1 - \frac{v}{c} \Lambda^0 \right) \quad \Lambda^{2'} = \Lambda^2 \quad \Lambda^{3'} = \Lambda^3 \end{aligned}$$

En el caso de que la velocidad tenga una dirección $\vec{\beta} = \vec{v}/c$ arbitraria, las ecuaciones de transformación vendrán dadas por la matriz

$$\mathcal{L}_{\vec{\beta}}^{\alpha'} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \vec{\beta}^T \\ -\gamma \vec{\beta} & 1 + \frac{(\gamma - 1) \vec{\beta} \vec{\beta}^T}{\beta^2} \end{pmatrix}$$

En forma explícita las relaciones de transformación toman la expresión

$$\begin{aligned} \Lambda^{0'} &= \gamma (\Lambda^0 - \vec{\Lambda} \cdot \vec{\beta}) \\ \vec{\Lambda}' &= \vec{\Lambda} + \frac{(\gamma - 1) \vec{\Lambda} \cdot \vec{\beta}}{\beta^2} \vec{\beta} - \gamma \Lambda^0 \vec{\beta} \end{aligned}$$

249

Las anteriores ecuaciones se pueden expresar de una forma general mediante

$$\begin{aligned} \Lambda^{0'} &= \gamma \left(\Lambda^0 - \frac{v}{c} \Lambda_{\parallel} \right) \\ \Lambda_{\parallel}' &= \gamma \left(\Lambda_{\parallel} - \frac{v}{c} \Lambda^0 \right) \\ \Lambda_{\perp}' &= \Lambda_{\perp} \end{aligned}$$

Donde $\Lambda_{\parallel}$ y $\Lambda_{\perp}$ son las proyecciones en la dirección paralela y perpendicular a $\vec{v}$.

Por la conservación de la carga, para un pequeño elemento de volumen será $dq = \rho dV = \rho_0 dV'$, donde ρ_0 es la densidad de carga en el sistema inercial S' en el que suponemos que está en reposo. La carga observada en movimiento desde S será entonces $\rho = \gamma \rho_0$ y la corriente $\vec{j} = \rho \vec{v} = \gamma \rho_0 \vec{v}$.

Las ecuaciones de Maxwell en el sistema S' , respecto al cual se encuentra fijo el material, se escribirán de la forma

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}' &= 0 & \vec{\nabla} \wedge \vec{E}' &= -\frac{\partial \vec{B}'}{\partial t'} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{D}' &= \rho' & \vec{\nabla} \wedge \vec{H}' &= \vec{j}' + \frac{\partial \vec{D}'}{\partial t'} \end{aligned}$$

junto con las relaciones de constitución

$$\vec{D}' = \epsilon \vec{E}'$$

$$\vec{B}' = \mu \vec{H}'$$

$$\vec{J}' = \sigma \vec{E}'$$

La última ecuación define la ley de Ohm, y ϵ, μ, σ son las constantes dieléctrica, de permeabilidad y de conductividad del material en reposo.

Considerando que $\mathcal{F}^\alpha$ y $\mathcal{F}^{\alpha\beta}$, así como el resto de las anteriores matrices y cuadvectores, se transforman ante una transformación de Lorentz de la forma

$$\mathcal{F}^\alpha = \mathcal{L}^\alpha_\beta \mathcal{F}^\beta$$

$$\mathcal{F}^{\alpha\beta} = \mathcal{L}^\alpha_\alpha \mathcal{L}^\beta_\beta \mathcal{F}^{\alpha\beta}$$

$$\mathcal{H}^{\alpha\beta} = \mathcal{L}^\alpha_\alpha \mathcal{L}^\beta_\beta \mathcal{H}^{\alpha\beta}$$

se obtienen a partir de dichas expresiones las relaciones de transformación de campo electromagnético entre el sistema fijo S y el sistema móvil S'

$$\vec{E}' = \gamma(\vec{E} + \vec{\beta} \wedge c\vec{B}) - \frac{(\gamma - 1)\vec{\beta} \cdot \vec{E}}{\beta^2} \vec{\beta} = \gamma(\vec{E} + \vec{\beta} \wedge c\vec{B}) - \frac{\gamma^2}{(\gamma - 1)} (\vec{\beta} \cdot \vec{E}) \vec{\beta}$$

$$c\vec{B}' = \gamma(c\vec{B} - \vec{\beta} \wedge \vec{E}) - \frac{(\gamma - 1)\vec{\beta} \cdot c\vec{B}}{\beta^2} \vec{\beta} = \gamma(c\vec{B} - \vec{\beta} \wedge \vec{E}) - \frac{\gamma^2}{(\gamma - 1)} (\vec{\beta} \cdot c\vec{B}) \vec{\beta}$$

$$c\vec{D}' = \gamma(c\vec{D} + \vec{\beta} \wedge \vec{H}) - \frac{(\gamma - 1)\vec{\beta} \cdot c\vec{D}}{\beta^2} \vec{\beta} = \gamma(c\vec{D} + \vec{\beta} \wedge \vec{H}) - \frac{\gamma^2}{(\gamma - 1)} (\vec{\beta} \cdot c\vec{D}) \vec{\beta}$$

$$\vec{H}' = \gamma(\vec{H} - \vec{\beta} \wedge c\vec{D}) - \frac{(\gamma - 1)\vec{\beta} \cdot \vec{H}}{\beta^2} \vec{\beta} = \gamma(\vec{H} - \vec{\beta} \wedge c\vec{D}) - \frac{\gamma^2}{(\gamma - 1)} (\vec{\beta} \cdot \vec{H}) \vec{\beta}$$

Estas expresiones se simplifican si se descomponen en sus componentes paralela y perpendicular a la dirección de movimiento

$$E'_{\parallel} = (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})_{\parallel} = E_{\parallel}$$

$$cB'_{\parallel} = (c\vec{B} - \frac{1}{c}\vec{v} \wedge \vec{E})_{\parallel} = B_{\parallel}$$

$$cD'_{\parallel} = (c\vec{D} + \frac{1}{c}\vec{v} \wedge \vec{H})_{\parallel} = D_{\parallel}$$

$$H'_{\parallel} = (\vec{H} - \vec{v} \wedge \vec{D})_{\parallel} = H_{\parallel}$$

$$E'_{\perp} = \gamma(\vec{E}_{\perp} + \vec{v} \wedge \vec{B}_{\perp})$$

$$cB'_{\perp} = \gamma(c\vec{B}_{\perp} - \frac{1}{c}\vec{v} \wedge \vec{E}_{\perp})$$

$$cD'_{\perp} = \gamma(c\vec{D}_{\perp} + \frac{1}{c}\vec{v} \wedge \vec{H}_{\perp})$$

$$H'_{\perp} = \gamma(\vec{H}_{\perp} - \vec{v} \wedge \vec{D}_{\perp})$$

donde por $\parallel$ se representa la componente paralela a la dirección del movimiento y por $\perp$ la componente perpendicular.

A través de las relaciones de constitución en S' definidas por $\vec{D}' = \epsilon \vec{E}'$, $\vec{B}' = \mu \vec{H}'$, obtenemos que el campo electromagnético visto desde el sistema S será

$$\vec{D} = \frac{1}{\left(1 - \frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0} \frac{v^2}{c^2}\right)} \left(\epsilon \vec{E} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) + \left(\frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0} - 1\right) \left(\frac{\vec{v}}{c^2} \wedge \vec{H} - \frac{\epsilon}{c^2} \vec{v} \cdot \vec{E} \vec{v} \right) \right)$$

$$\vec{B} = \frac{1}{\left(1 - \frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0} \frac{v^2}{c^2}\right)} \left(\mu \vec{H} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) - \left(\frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0} - 1\right) \left(\frac{\vec{v}}{c^2} \wedge \vec{E} - \frac{\mu}{c^2} \vec{v} \cdot \vec{H} \vec{v} \right) \right)$$

Estas ecuaciones son conocidas como las relaciones de constitución de Minkowski.

Despreciando términos superiores a $(v/c)^2$ se obtiene

$$\vec{D} + \frac{1}{c^2} \vec{v} \wedge \vec{H} = \epsilon (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \quad \text{o} \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E} + \left(\frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0} - 1\right) \frac{\vec{v}}{c^2} \wedge \vec{H}$$

$$\vec{B} - \frac{1}{c^2} \vec{v} \wedge \vec{E} = \mu (\vec{H} - \vec{v} \wedge \vec{D}) \quad \text{o} \quad \vec{B} = \mu \vec{H} - \left(\frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0} - 1\right) \frac{\vec{v}}{c^2} \wedge \vec{E}$$

En componentes paralelas y perpendiculares a la dirección del movimiento, las relaciones de constitución en sistema fijo de observación adoptan la forma

$$\vec{D}_{\parallel} = \epsilon \vec{E}_{\parallel}$$

$$\vec{B}_{\parallel} = \mu \vec{H}_{\parallel}$$

$$\left(1 - \frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0} \frac{v^2}{c^2}\right) \vec{D}_{\perp} = \epsilon \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \vec{E}_{\perp} + (\epsilon\mu - \epsilon_0\mu_0) \vec{v} \wedge \vec{H}$$

$$\left(1 - \frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0} \frac{v^2}{c^2}\right) \vec{B}_{\perp} = \mu \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \vec{H}_{\perp} + (\epsilon\mu - \epsilon_0\mu_0) \vec{v} \wedge \vec{E}$$

Así mismo, de las ecuaciones que relacionan los campos con $\vec{J}$, $\vec{P}$, $\vec{M}$ obtenemos las relaciones de transformación para las densidades de polarización, magnetización y corrientes observadas en el sistema S

$$\vec{P} = (\epsilon - \epsilon_0) \vec{E} + \frac{1}{\mu} \left(\frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0} - 1\right) \frac{\vec{v}}{c^2} \wedge \vec{B}$$

$$\vec{M} = \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu_0}\right) \vec{B} + \frac{1}{\mu} (\epsilon\mu - \epsilon_0\mu_0) \frac{\vec{v}}{c^2} \wedge \vec{E}$$

O también de las relaciones de transformación de $\mathcal{M}^{\alpha\beta}$ se obtiene

$$\begin{aligned}P_{\parallel} &= P'_{\parallel} \\cP_{\perp} &= \gamma \left(cP'_{\perp} + \frac{1}{c} \vec{v} \wedge \vec{M}'_{\perp} \right) \\M_{\parallel} &= M'_{\parallel} \\M_{\perp} &= \gamma (M'_{\perp} - \vec{v} \wedge P'_{\perp})\end{aligned}$$

Esto nos confirma que $(-c\vec{P}, \vec{M})$ se transforman de la misma manera que $(\vec{E}, c\vec{B})$, y como ya hemos visto son las componentes del tensor material $\bar{\mathcal{M}}$

$$\bar{\mathcal{M}}(c\vec{P}, \vec{M}) \equiv \bar{\mathcal{P}}(-c\vec{P}, \vec{M})$$

Vemos la complejidad de las relaciones de transformación de las magnitudes electromagnéticas en función de las constantes del material. Las ecuaciones se simplifican notablemente en el vacío con $\epsilon\mu = \epsilon_0\mu_0$, aunque las componentes de $E_{\perp}$ y $B_{\perp}$ en el sistema fijo y en el móvil son diferentes.

Sin embargo, ya hemos visto que $(\vec{E}^2 - c^2\vec{B}^2)$ y $c\vec{E} \cdot \vec{B}$ son dos invariantes que se mantienen en la transformación al pasar de un sistema a otro, junto con la otra condición invariante de que se mantengan iguales sus componentes paralelas al movimiento.

El que el campo eléctrico y magnético estén interrelacionados a través de las anteriores ecuaciones de transformación fue la gran contribución de la teoría de relatividad de Einstein, que demostró que la electricidad y el magnetismo estaban unificados y que son magnitudes que dependiendo del estado de movimiento del observador se transforman uno en otra.

La aparición de un término de polarización $\frac{\gamma}{c^2} \vec{v} \wedge \vec{M}$, debido a una magnetización móvil, es un efecto estrictamente relativista, aunque su magnitud es pequeña para las velocidades habituales.

De igual forma, una polarización al desplazarse da lugar a una magnetización $\gamma \vec{P} \wedge \vec{v}$ vista desde un sistema fijo respecto al cual se desplaza, y que es observable en los generadores de inducción unipolar.

Estos fenómenos fueron confirmados experimentalmente por Roentgen y Eikhenwald.

Corrientes inducidas por materiales móviles y disipación de energía en sistemas abiertos

Puesto que $\vec{J} = (c\rho, \vec{J})$ se transforma como un cuadrivector, tendremos

$$\vec{J}' = \vec{J} + \frac{(\gamma - 1)\vec{J} \cdot \vec{v}}{\vec{v}^2} \vec{v} - \gamma \rho \vec{v}$$

$$c\rho' = \gamma \left(c\rho - \frac{1}{c} \vec{J} \cdot \vec{v} \right)$$

O también

$$c\rho' = \gamma \left(c\rho - \frac{v}{c} J_{\parallel} \right)$$

$$J_{\parallel} = \gamma (\vec{J} - \rho \vec{v})_{\parallel} = \gamma J_{\parallel} - \rho v$$

$$J_{\perp} = J'_{\perp}$$

Aunque sea ρ_0 cero en el sistema S' que se mueve con la partícula respecto al cual se encuentra en reposo, sin embargo, en el sistema fijo S es $\rho \neq 0$. Por ello, la corriente $\vec{J}$, se puede descomponer en una corriente de convección $\vec{J}_v$ y una corriente de conducción $\vec{J}_c$

$$\vec{J} = \vec{J}_v + \vec{J}_c = \rho \vec{v} + \vec{J}_c - \gamma \rho_0 \vec{v} + \vec{J}_c$$

La aparición del término $\rho \vec{v}$ en la corriente, da lugar a una corriente de convección que produce un campo magnético, conocido como el efecto Rowland.

Si en el sistema del material móvil S' no hay cargas netas $\rho_0 = 0$ y solo una corriente de conducción

$$\vec{J}_c = \sigma \vec{E}'$$

las ecuaciones de transformación de Lorentz para el sistema fijo S nos dan entonces

$$\vec{J} = \rho \vec{v} + \vec{J}_c = (\gamma - 1) \frac{\vec{J}_c \cdot \vec{v}}{\vec{v}^2} \vec{v} + \vec{J}_c$$

$$\rho = \frac{\gamma}{c^2} \vec{J}_c \cdot \vec{v}$$

y por tanto

$$\vec{J}_c = \vec{J}_c + (\gamma^{-1} - 1) \frac{\vec{J}_c \cdot \vec{v}}{\vec{v}^2} \vec{v} = \sigma \vec{E}' + (\gamma^{-1} - 1) \frac{\sigma \vec{E}' \cdot \vec{v}}{\vec{v}^2} \vec{v}$$

La densidad de fuerza ejercida por el campo viene dada por

$$\mathcal{K}_c^\alpha = -\partial_\beta T_c^{\alpha\beta} = \mathcal{F}^\alpha_\beta J^\beta = (\vec{J} \cdot \vec{E}, \rho \vec{E} + \vec{J} \wedge \vec{B})$$

Su componente espacial es la fuerza de Lorentz

$$\vec{f}_L = \rho(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) + \vec{J}_c \wedge \vec{B}$$

La componente temporal de la energía, se descompone en el trabajo mecánico $\vec{f}_L \cdot \vec{v}$ hecho sobre la materia, más la energía calorífica disipada por efecto Joule Q_J

$$\vec{J} \cdot \vec{E} = (\rho \vec{v} + \vec{J}_c) \cdot \vec{E} = \vec{f}_L \cdot \vec{v} + \vec{E} \cdot \vec{J}_c = \vec{f}_L \cdot \vec{v} + Q_J$$

Evidentemente en el sistema móvil con las cargas fijas en S' solo existe Q_J . Veremos más adelante que existen unas relaciones de transformación de Q_J entre el sistema fijo y móvil.

Según Möller, el tensor de energía impulso en medios materiales no es simétrico debido a que el sistema no es cerrado y hay una disipación irreversible de energía $Q_J \neq 0$, y por tanto, hay que considerar también el tensor de energía de la materia, de forma que la divergencia del tensor de energía del sistema total cerrado sea nula.

Todo esto se discute con más detalle en el capítulo de teorías covariantes.

En la formulación de Minkowski, el cuadvivector de corriente puede se puede descomponer también en una parte convectiva y otra conductiva

$$\vec{J} = \rho_0 \vec{U} + \vec{J}_c$$

donde $\vec{U}$ es el cuadvivector de velocidad definido por

$$\vec{U} = (\gamma c, \gamma \vec{v})$$

$$|\vec{U}|^2 = \vec{U} \cdot \vec{U} = U^\alpha U_\alpha \equiv c^2$$

Puesto que

$$\vec{J} \cdot \vec{U} \equiv \vec{J}_0 \cdot \vec{U}_0 = \rho_0 c^2 \quad \text{y}$$

$$\vec{J}_c \cdot \vec{U} \equiv \vec{J}_{0c} \cdot \vec{U}_0 = 0$$

se verifica entonces la descomposición

$$\vec{J}_c = \vec{J} - \frac{\vec{J} \cdot \vec{U}}{c^2} \vec{U} = \vec{J} - \rho_0 \vec{U}$$

Vemos que $\vec{J}_c$ es también un cuadvivector al serlo $\vec{J}$ y $\vec{U}$.

El que los cuadvivectores de fuerza del campo y la velocidad no sean ortogonales, es una indicación de que el sistema no es cerrado,

$$\vec{\mathcal{K}}_c \cdot \vec{\mathcal{U}} = (\vec{\mathcal{F}} \cdot \vec{\mathcal{J}}) \cdot \vec{\mathcal{U}} = -(\vec{\mathcal{F}} \cdot \vec{\mathcal{U}}) \vec{\mathcal{J}} = -\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{J}}_c = -Q',$$

y de que hay una transferencia de energía desde el sistema del campo electromagnético al de la materia, que este caso es equivalente a la energía disipada por efecto Joule en la materia.

Ecuaciones del electromagnetismo a bajas velocidades

A bajas velocidades en que $v \ll c$, las anteriores ecuaciones de transformación para el campo electromagnético en el vacío adoptan la forma

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}' - \vec{v} \wedge \vec{B}' & \vec{B} &= \vec{B}' + \frac{1}{c^2} \vec{v} \wedge \vec{E}' \\ \vec{E}' &= \vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} & \vec{B}' &= \vec{B} - \frac{1}{c^2} \vec{v} \wedge \vec{E} \\ \vec{D} &= \vec{D}' - \frac{1}{c^2} \vec{v} \wedge \vec{H}' & \vec{H} &= \vec{H}' + \vec{v} \wedge \vec{D}' \\ \vec{D}' &= \vec{D} + \frac{1}{c^2} \vec{v} \wedge \vec{H} & \vec{H} &= \vec{H} - \vec{v} \wedge \vec{D} \\ \vec{J} &= \vec{J}' + \rho \vec{v} & \rho &= \rho' + \frac{1}{c^2} \vec{v} \cdot \vec{J}' \\ \vec{J}' &= \vec{J} + \rho \vec{v} & \rho &= \rho' - \frac{1}{c^2} \vec{v} \cdot \vec{J}' \\ \vec{P} &= \vec{P}' + \frac{1}{c^2} \vec{v} \wedge \vec{M}' & \vec{M} &= \vec{M}' + \vec{P}' \wedge \vec{v} \\ \vec{P}' &= \vec{P} - \frac{1}{c^2} \vec{v} \wedge \vec{M} & \vec{M}' &= \vec{M} - \vec{P} \wedge \vec{v} \end{aligned}$$

Obsérvese que en este caso para pasar de sistema P al P' basta con intercambiar $X \leftrightarrow X'$ y $\vec{v} \leftrightarrow -\vec{v}$.

Las anteriores ecuaciones están de acuerdo con las obtenidas la primera sección por razonamientos simplificados.

A partir de las anteriores ecuaciones de transformación, se puede comprobar también que la fuerza de Lorentz tiene un origen relativista. La densidad de fuerza eléctrica en el sistema S' que se mueve con una carga respecto a un observador fijo en S , se transforma como

$$\vec{f}_L' = \rho \vec{E}' \leftrightarrow \vec{f}_L = \vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}$$

Por tanto, se puede considerar la fuerza de Lorentz como una transformación de Lorentz de la ley de Coulomb.

Campos aparentes efectivos en materiales móviles

Si existe un campo electromagnético $\vec{E}, \vec{B}$ en un sistema fijo respecto al cual se desplaza un material, las anteriores ecuaciones de transformación pueden reinterpretarse suponiendo que en el material aparece un campo electromagnético aparente que viene dado por

$$\vec{E}_a = \vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}$$

$$\vec{B}_a = \vec{B} - \frac{\vec{v}}{c^2} \wedge \vec{E}$$

$$\vec{D}_a = \vec{D} + \frac{\vec{v}}{c^2} \wedge \vec{H}$$

$$\vec{H}_a = \vec{H} - \vec{v} \wedge \vec{D}$$

En la última ecuación, el segundo término procede de un efecto dipolar, así como en la primera a es debida a un efecto Faraday que se explican por la física clásica. En la tercera ecuación, el segundo término debido a la magnetización tiene un origen relativista

La corriente $\vec{J}$ siempre tiene un significado físico concreto, Sin embargo las magnitudes $\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}, \vec{H}$, solo tienen una interpretación simple en sistema fijo S .

Según Möller, $\vec{E}_a, \vec{D}_a, \vec{B}_a, \vec{H}_a$, son las magnitudes con un significado físico medible en el material que se desplaza. $\vec{E}_a$ y $\vec{D}_a$ representan la fuerza experimentada por una carga de prueba en una cavidad longitudinal y transversal respectivamente.

De igual forma, $\vec{B}_a$ y $\vec{H}_a$ representan la fuerza sobre un polo magnético en una cavidad transversal y longitudinal respectivamente.

Por tanto, las relaciones de constitución deberán ser en S

$$\vec{D}_a = \epsilon \vec{E}_a$$

$$\vec{B}_a = \mu \vec{H}_a$$

Todo esto se puede ver más claramente a través de las relaciones de transformación del cuadrivector de fuerza de Minkowski, cuyas componentes son magnitudes físicamente medibles.

Para la ley de Ohm, teniendo en cuenta que en el sistema móvil S' solo hay una corriente conductiva $\vec{J}_c = \sigma \vec{E}'$, será

$$\vec{J}_c = \gamma(\sigma \vec{E}_a \cdot \vec{v}, \sigma \vec{E}_a)$$

Definamos los cuadrivectores

$$\vec{E}_a = (E_a^\alpha) = \frac{1}{c} \vec{F} \cdot \vec{U} = \frac{1}{c} F_\beta^\alpha U^\beta$$

$$\vec{D}_a = (D_a^\alpha) = \frac{1}{c^2} \vec{H} \cdot \vec{U} = \frac{1}{c^2} H_\beta^\alpha U^\beta$$

y sus duales

$$\vec{E}_a^* = (E_a^{*\alpha}) = \frac{1}{c} \vec{F}^* \cdot \vec{U} = \frac{1}{c} F_\beta^{*\alpha} U^\beta$$

$$\vec{E}_a^* = (D_a^{*\alpha}) = \frac{1}{c^2} \vec{H}^* \cdot \vec{U} = \frac{1}{c^2} H_\beta^{*\alpha} U^\beta$$

Estos cuadrivectores tienen por componentes

$$\vec{E}_a = \gamma \left(\frac{1}{c} \vec{E} \cdot \vec{v}, \vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right) \equiv \gamma \left(\frac{1}{c} \vec{E}_a \cdot \vec{v}, \vec{E}_a \right)$$

$$\vec{D}_a = \gamma \left(\frac{1}{c} \vec{D} \cdot \vec{v}, \vec{D} + \frac{\vec{v}}{c^2} \wedge \vec{H} \right) \equiv \gamma \left(\frac{1}{c} \vec{D}_a \cdot \vec{v}, \vec{D}_a \right)$$

$$\vec{B}_a = \gamma \left(\frac{1}{c} \vec{B} \cdot \vec{v}, \vec{B} - \frac{\vec{v}}{c^2} \wedge \vec{E} \right) \equiv \gamma \left(\frac{1}{c} \vec{B}_a \cdot \vec{v}, \vec{B}_a \right)$$

$$\vec{H}_a = \gamma \left(\frac{1}{c} \vec{H} \cdot \vec{v}, \vec{H} - \vec{v} \wedge \vec{D} \right) \equiv \gamma \left(\frac{1}{c} \vec{H}_a \cdot \vec{v}, \vec{H}_a \right)$$

Vemos que realmente $\vec{E}_a, \vec{D}_a, \vec{B}_a, \vec{H}_a$ son las intensidades de fuerzas que actúan sobre cargas y polos magnéticos en reposo en un sistema S' , y como son cuadrivectores relativistas, corresponden también a observables físicos en el sistema S que se desplaza con velocidad $-\vec{v}$ respecto a S' .

Es importante observar que como las ecuaciones son lineales los campos son aditivos.

Si hay varios cuerpos separados moviéndose con velocidades diferente, esta aditividad se mantendrá. Las formulas también serán válidas si las aceleraciones son pequeñas.

Efecto de magnetización inducida

El origen de la magnetización aparente $\vec{P} \wedge \vec{v}$ que aparece al moverse un material dieléctrico, ya fue justificado, y tiene su origen en las corrientes de convección creadas por las cargas de polarización moverse que eran igual a

$$\frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \vec{v} \wedge (\vec{P} \wedge \vec{v})$$

por lo contribuían a la ecuación de Maxwell de la ley de Ampère como

$$\vec{v} \wedge (\vec{H} - \vec{P} \wedge \vec{v}) = \vec{J}_c + \rho \vec{v} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \frac{\partial \epsilon_0 \vec{E}}{\partial t}$$

lo que se puede interpretar como la aparición de una magnetización aparente

$$\vec{M} = \vec{v} \wedge \vec{P}$$

Otra forma de ver todo esto, como ya hemos visto, es que en el sistema S' en el que se encuentra en reposo el material magnético, la corriente de conducción $\vec{J}_c$ da origen en el sistema S de observación a unas cargas netas.

Las corriente de conducción $\vec{J}_c$ se transforman entre ambos sistemas de acuerdo con los cuadvectores relativistas

$$\vec{J}_c = (0, \vec{J}_c)$$

y de forma general

$$\vec{J}_c = \left(\frac{\gamma}{c} \vec{v} \cdot \vec{J}_c, \frac{\gamma - 1}{c^2} \vec{v} \cdot \vec{J}_c \vec{v} \right)$$

donde $\vec{v}$ es la velocidad del desplazamiento.

Una corriente $\vec{J}_c$ que se mueva en un circuito sin carga neta aparece al observador externo como con una carga aparente

$$\rho_c = \frac{\gamma}{c^2} \vec{v} \cdot \vec{J}_c$$

por lo que si la corriente es cerrada, como en una espira cuadrada, esto da origen a la aparición de cargas de distinto signo e lo largo del circuito de acuerdo con del ángulo de $\vec{v}$ y $\vec{J}_c$ que generan un dipolo eléctrico.

Por esta razón, un dipolo magnético $\vec{m}$ asociado con una corriente cerrada, al desplazarse da lugar a la aparición de un dipolo eléctrico

$$\vec{p} = \frac{1}{c^2} \vec{v} \wedge \vec{m}$$

Como en un material magnético la magnetización $\vec{M}$ se puede asociar a corrientes microscópicas, la anterior expresión es generalizable a

$$\vec{P} = \frac{1}{c^2} \vec{v} \wedge \vec{M}$$

Sin embargo debido al término c^2 en el denominador, la polarización producida es de una magnitud muy pequeña.

Efecto relativista de polarización inducida

La aparición de una polarización aparente $\frac{1}{c^2} \vec{v} \wedge \vec{M}$ cuando un material magnético se desplaza tiene una causa más compleja y se debe a un efecto relativista.

Un aspecto mucho más sutil de este efecto es que, si consideramos las cargas que se mueven en un circuito cerrado como en el caso de un dipolo magnético, los intervalos de tiempo relativos entre los sistemas en que se encuentra fija la espira y observador que la ve desplazarse son distintos relativísticamente y dependen de la dirección de la velocidad instantánea de la carga respecto a la velocidad de desplazamiento.

Esto hace que los flujos netos de las cargas vistos para los distintos elementos de la espira sean diferentes, lo que si al integrase a toda la espira produce la creación de un dipolo eléctrico neto.

Si una carga se mueve en una órbita circular que se desplaza según el eje x con velocidad v

$$(x', y') = (r_0' \cos(\omega't' + \varphi_0), r_0' \sin(\omega't' + \varphi_0))$$

las ecuaciones de transformación de Lorentz para un observador fijo del cuadrivector $(ct, \vec{x})$ serán

$$ct = \gamma \left(ct' + \frac{v}{c} x' \right) = \gamma \left(ct' + \frac{v}{c} r_0' \cos(\omega't' + \varphi_0) \right)$$

$$x = \gamma \left(ct' + \frac{v}{c} x' \right) = \gamma \left(ct' + \frac{v}{c} r_0' \cos(\omega't' + \varphi_0) \right)$$

$$y = y' = r_0' \sin(\omega't' + \varphi_0)$$

$$z = z'$$

Puesto que

$$\frac{dt}{dt'} = \gamma \left(1 - \frac{v\omega'}{c^2} r_0' \sin(\omega't' + \varphi_0) \right)$$

y los periodos en ambos sistemas estarán relacionados por

$$T = \gamma T' = \frac{2\pi\gamma}{\omega'}$$

Entonces el desplazamiento medio en la dirección x de la carga visto por el observador en reposo será

$$\langle x \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T x dt = \frac{\omega'}{2\pi\gamma} \int_0^{\frac{2\pi\gamma}{\omega'}} x \frac{dt}{dt'} dt' = \frac{\omega' v r_0'^2}{2c^2}$$

lo que produce un dipolo aparente

$$p_x = q \langle x \rangle = \frac{q\omega' v r_0'^2}{2c^2}$$

Como el dipolo magnético es

$$m_y = IS = \left(\frac{q}{T} \right) (\pi r_0'^2) = \frac{q\omega' r_0'^2}{2c^2}$$

vemos que el dipolo eléctrico creado mantiene la relación

$$\vec{p} = \frac{1}{c^2} \vec{v} \wedge \vec{m}$$

Con este ejemplo, lo que se ha querido demostrar es que una aplicación estrictamente operativa de de la ecuaciones de transformación relativistas a las magnitudes del campo electromagnético, aunque da los resultado correctos, a veces esconde los procesos físicos reales que son el fundamento de fenómeno.

En este caso, la polarización aparente subyace en el fenómeno de que los intervalos de tiempo para la carga y el observador estacionario son distintos y depende de la orientación de su velocidad respecto al movimiento de translación.

Efecto relativista de la ley de inducción de Faraday

Para un material magnetizado que se desplaza uniformemente a velocidad constante se verifica además

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = \frac{1}{c^2} \vec{\nabla} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{M}) = -\frac{1}{c^2} \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{M}$$

En ausencia de cargas y corrientes de cargas reales

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\frac{1}{\epsilon_0} \vec{\nabla} \cdot \vec{P} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{M} = \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{B}$$

La fuerza de Lorentz que ve un observador estacionario al desplazarse una carga con velocidad $\vec{v}$ tiene que ser igual a la fuerza que se produce suponiendo la carga fija y el observador moviéndose en dirección contraria con velocidad $-\vec{v}$.

Como sobre una carga fija solo puede actuar una fuerza de origen eléctrico será

$$\vec{E} = -\vec{v} \wedge \vec{B}$$

y por tanto

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}$$

Para un observador que se mueve con el material la variación del campo será la derivada total conectiva que deberá ser nula

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} \equiv 0$$

de lo que se obtiene la identidad

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Vemos por tanto que tras la ley de inducción de Faraday se esconde un sutil efecto relativista asociado en el concepto de los tiempos y de simultaneidad relativista

Representación convectiva de las ecuaciones de Maxwell

Una forma de interpretar formalmente los anteriores resultados fue ideada por Pauli en base a la derivada convectiva $D\vec{X}/Dt$, que es un concepto útil que nos permite analizar las ecuaciones de los sistemas móviles

$$\frac{D\vec{X}}{Dt} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{X} = \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} + \vec{v} \vec{\nabla} \cdot \vec{X} - \vec{\nabla} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{X})$$

Los significados del campo electromagnético

La variación de flujo a través de una superficie que se desplaza con velocidad $\vec{v}$ se puede calcular por medio de la derivada convectiva

$$\frac{d}{dt} \int_S \vec{X} \cdot d\vec{S} = \int_S \frac{D\vec{X}}{Dt} \cdot d\vec{S}$$

Con esta notación, las ecuaciones del campo electromagnético respecto al sistema estacionario se pueden reescribir de la forma

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E}_a = -\frac{D\vec{B}}{Dt}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H}_a = \vec{J} - \rho\vec{v} + \frac{D\vec{D}}{Dt}$$

Las ecuaciones de Maxwell en su forma integral para las leyes de Faraday y de Ampère están también representadas por

$$\int \frac{D\vec{B}}{Dt} \cdot d\vec{\sigma} = - \oint \vec{E}_a \cdot d\vec{l}$$

$$\oint \frac{D\vec{J}_a}{Dt} \cdot d\vec{S} = \oint \vec{H}_a \cdot d\vec{l}$$

donde $\vec{J}_a$ desempeña el papel de una corriente aparente en S .

$$\vec{J}_a = \vec{J} - \rho\vec{v} + \frac{D\vec{D}}{Dt}$$

Obsérvese que sólo es efectiva la corriente de conducción $\vec{J} - \rho\vec{v}$, y que además $D\vec{D}/Dt$ desempeña el papel de una corriente de desplazamiento.